UNIDAD DE APRENDIZAJE VI

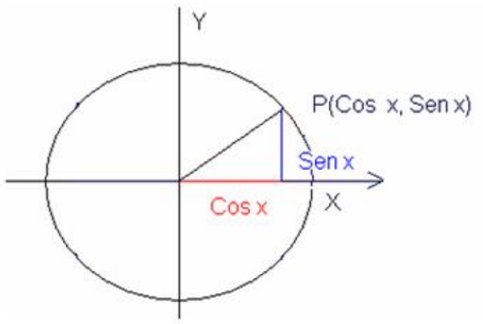
Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Identifica ecuaciones trigonometricas. 2. Da solución a ecuaciones trignométricas. 3. Analiza las soluciones de las ecuaciones trigonométricas.	Concepto de ecuación trigonométrica Diferencia entre identidad y ecuación trigonométrica Algoritmos para la solución de ecuaciones trigonométricas.

A Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es aquella en la que la incógnita a encontrar es el valor de uno o varios ángulos entre 0° y 360°, existen de primer y segundo grado al igual que en álgebra.

En esta unidad se requiere tener presente las habilidades algebraicas y las destrezas que se han adquirido en esta materia.

Antes de iniciar a resolver ecuaciones, es importante saber interpretar el o los resultados que se obtendrán. Para ello se hace necesario recordar y tener presente el círculo trigonométrico.

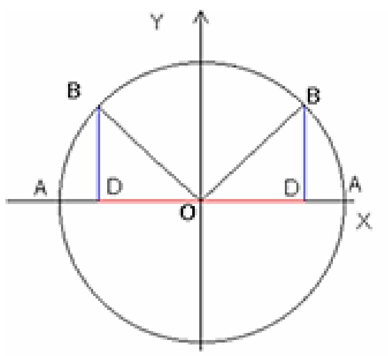


Si la solución de la ecuación es:

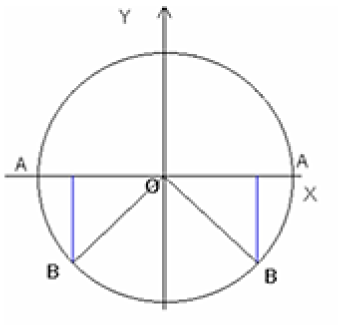
$Sen\alpha =$ ½ al obtener con la calculadora Sen^{-1} ½ = 30° esto es cierto pero existe otro valor que también debemos tener en cuenta ya que el seno es positivo en el segundo cuadrante y es el de 150°.

Las siguientes gráficas presentan lo que pasa en cada cuadrante:

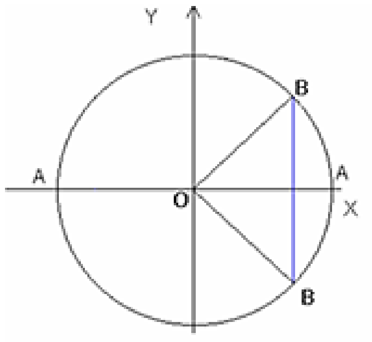
A) Si el resultado es el seno positivo, dicho resultado está en el primer y segundo cuadrante.



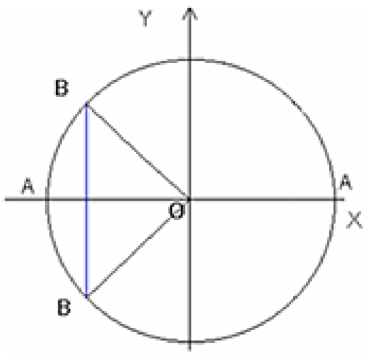
B) Si el resultado es seno negativo, dicho resultado está en el tercer y cuarto cuadrante.



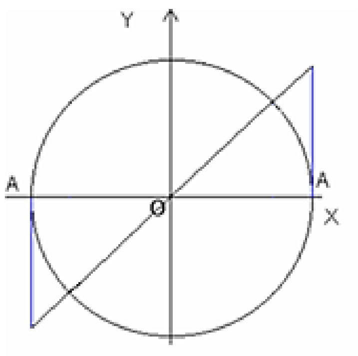
C) Ahora bien, si el resultado es coseno positivo estará en el primer y cuarto cuadrante.



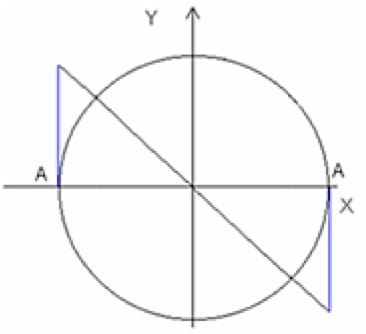
D) Si el resultado es coseno negativo estará en el segundo y tercer cuadrante.



E) Cuando sea la solución tangente positiva el resultado estará en el primer y tercer cuadrante.



F) Finalmente, al ser tangente negativa la solución estará en el segundo y cuarto cuadrante.



Ejemplos

1. De acuerdo a los datos siguientes, obtener los posibles valores de la incógnita ente el intervalo $0° \leq x \leq 360°$.

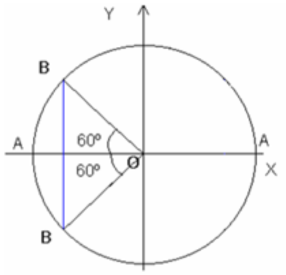
a) Cos x = - ½

El ángulo en el primer cuadrante cuyo valor es 0.5 es 60°, pero como la función es negativa, la calculadora solo nos da el primer valor.

Solución: $x=\cos^{-1} -0.5$

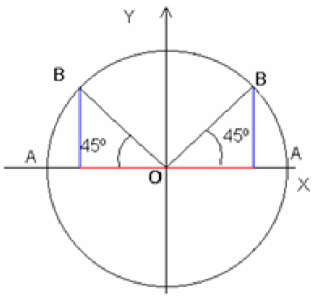
Primer solución x=120°

Segunda solución x=240°



b) Si Sen A = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o Sen A= 0.7071, el ángulo será 45°, y como la función Seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, obtenemos la siguiente solución.

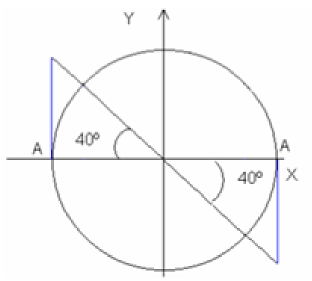
$A=\text{Sen}^{-1}\ 0.7071$
A=45°
ó
A=135°



c) Si Tan B=-0.8390, el ángulo será 40°, pero la tangente es negativa por lo tanto se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante, de tal modo que se obtiene la siguiente solución.

$B=\text{Tan}^{-1} -0.8390$

B=140° ó B=320°



2. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas y obtener todos los posibles valores de la incógnita entre el intervalo $0° \leq x \leq 360°$.

Nota. Para este tema, se deberán recordar los distintos métodos para resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas vistas en primer semestre.

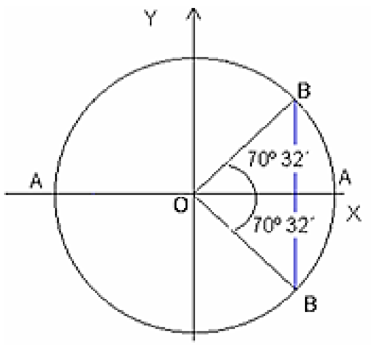
$$3 \text{ Cos } x - 1 = 0$$

Solución.

$$3 \text{ Cos } x = 1$$

$$\text{Cos } x = \frac{1}{3}$$

$x = \text{Cos} -1\ 0.333$
$x = 70°\ 32'$
ó
$x = 289°\ 28'$



Al igual que en las ecuaciones algebraicas se realizó una comprobación, en las trigonométricas también se realiza

$$3 \text{ Cos } x - 1 = 0$$

$$3 \text{ Cos } 70°\ 32' - 1 = 0$$

$$3\ (0.3333) - 1 = 0$$

$$0.9999 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

ó con el segundo valor

$$3 \text{ Cos } x - 1 = 0$$

$$3 \text{ Cos } 289°\ 28' - 1 = 0$$

$$3\ (0.3333) - 1 = 0$$

$$0.9999 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

3.

$$4 \text{ Cos}^2 A = 3$$

$$\text{Cos}^2 A = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cos } A = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Cos } A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

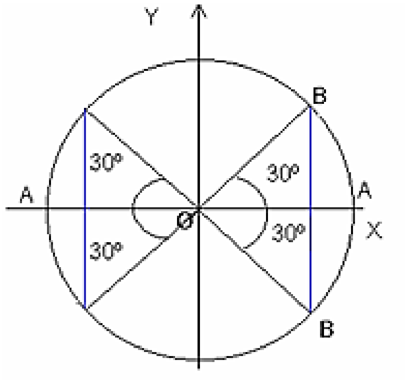
$A = \text{Cos}^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = 30°$ ó $330°$

$A = \text{Cos}^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = 150°$ ó $210°$

Recordar que toda raíz cuadrada puede ser positiva o negativa, de ahí el doble signo, por lo tanto existen dos soluciones para el Coseno positivo y dos para el negativo.



4.

$$3 \text{ Tan A} + 3 \text{ Cot A} = 4\sqrt{3}$$

$$3 \text{ Tan A} + 3\left(\frac{1}{Tan\ A}\right) = 4\sqrt{3}$$

$$3 \text{ Tan A} + \left(\frac{3}{Tan\ A}\right) = 4\sqrt{3}$$

$$3 \text{ Tan}^2 \text{ A} + 3 = 4\sqrt{3}\ \text{ Tan A}$$

$$3 \text{ Tan}^2 \text{ A} - 4\sqrt{3}\ \text{ Tan A} + 3 = 0$$

Esta es una ecuación equivalente y es del tipo cuadrática de la forma ***ax² + bx + c = 0*** que se soluciona por el método de la fórmula general, tendiendo como desarrollo:

$$\text{Tan A} = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$\text{Tan A} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-36}}{6}$$

$$\text{Tan A} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6}\ ;\ \sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Tan A}_1 = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Tan A}_1 = \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Tan A}_1 = \sqrt{3}$$

$$\text{A}_1 = \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$$

$$\text{A}_1 = 60° \text{ o } 240°$$

$$\text{Tan A}_2 = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Tan A}_2 = \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Tan A}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{A}_2 = \text{Tan}^{-1}\ 0.5773$$

$$\text{A}_2 = 330° \text{ o } 120°$$

Ejercicios

- $\sqrt{2Sen\ B - 1} = 0$
- $2\ \text{Sen}\ Q + \text{Cos}^2\ Q = \frac{7}{4}$
- $4\ \text{Sen}^3\ R - \text{Sen}\ R = 0$
- $\text{Csc}\ E + \text{Cot}\ E = \sqrt{3}$
- $2\ \text{Sen}^2\ x + 3\ \text{Cos}\ x - 3 = 0$
- $\text{Tan}\ R = \text{Cot}^2\ R$
- $2\ \text{Sen}^2\ A = -3\ \text{Cos}\ A$
- $4\ \text{Tan}^2\ x - 3\ \text{Sec}^2\ x = 0$
- $2\ \text{Sen}\ K - \text{Csc}\ K + \text{Cot}\ K = 0$
- $\text{Cos}^2\ x + 3\ \text{Sen}\ x = 3$